第 19 卷 第 1 期　　大 同 职 业 技 术 学 院 学 报　　Vol 19. No. 1
2005 年 3 月　　JOURNAL OF DATONG VOCATIONAL COLLEGE　　MAR. 2005

# 关于 n! 的标准分解式定理的两个结论

张　芳

(大同职业技术学院数理系,　山西 大同 037008)

**摘　要**: n! 的标准素因数分解定理是初等数学的一个非常重要的定理, 本文将利用此定理, 通过一系列的证明推理, 给出两个重要的结论

**关键词**: 阶乘; 素因数, 指数; 标准分解式; 整除

**中图分类号**: O 156. 1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1009- 6353(2005) 01- 0074- 01

## 1　引言

定理($n$! 的标准素因数分解定理): 在 $n$! 的标准分解式中, 素数 $P$ 的最高指数

$$p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \cdots + [\frac{n}{p^k}].$$

这里, $p^k \leq n < p^{k+1}$, k 是非负整数. 本文将利用 n! 的标准素因数分解式定理 1 来给出两个结论

## 2　定理 1

若 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 是不大于 n 的所有素数, 则 n! 的标准分解式为

$$n! = \prod_{i=1}^{s} p_i^{[\frac{n}{p_i}] + [\frac{n}{p_i^2}] + \cdots + [\frac{n}{p_i^{k_i}}]} \quad (1)$$

其中 $p_i^{k_i} \leq n \prec p_i^{k_i+1}, k_i \in N$.

证明: 由于不超过 n 的所有素数为 $p_1, p_2, \cdots, p_s$, 由定理知: $p_i(n!) = [\frac{n}{p_i}] + [\frac{n}{p_i^2}] + \cdots + [\frac{n}{p_i^{k_i}}]$. 其中

$p_i^{k_i} \leq n \prec p_i^{k_i+1}, k_i \in N \quad i = 1, 2, \cdots, s$ 所以,

$$n! = p_1^{[\frac{n}{p_1}] + \cdots + [\frac{n}{p_1^{k_1}}]} \cdots p_s^{[\frac{n}{p_s}] + \cdots + [\frac{n}{p_s^{k_s}}]}$$

$$= \prod_{i=1}^{s} p_i^{[\frac{n}{p_i}] + [\frac{n}{p_i^2}] + \cdots + [\frac{n}{p_i^{k_i}}]}$$

例 1　求 20! 的标准素因数分解式

解: 不超过 20 的素数有 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. 由定理 1 知

$$2(20!) = [\frac{20}{2}] + [\frac{20}{2^2}] + [\frac{20}{2^3}] + [\frac{20}{2^4}]$$
$$= 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$3(20!) = [\frac{20}{3}] + [\frac{20}{3^2}] = 6 + 2 = 8$$

$$5(20!) = [\frac{20}{5}] = 4 \qquad 7(20!) = [\frac{20}{7}] = 2$$

$$11(20!) = [\frac{20}{11}] = 1 \qquad 13(20!) = [\frac{20}{13}] = 1$$

$$17(20!) = [\frac{20}{17}] = 1 \qquad 19(20!) = [\frac{20}{19}] = 1$$

所以 $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

定理 2　设整数 $a_j > 0 (1 \leq j \leq s)$, $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$, 则 $n! / (a_1! \cdot a_2! \cdots a_s!)$ 是整数

证明: 由定理知, 只要证明对任意素数 p 必有 $p(n!) \geq p(a_1!) + p(a_2!) + \cdots p(a_s!)$

由(1) 式知, 可以从下面不等式推出: 对任意 $j \geq 1$, 有

$$\left[\frac{n}{p^j}\right] \geq \left[\frac{a_1}{p^j}\right] + \left[\frac{a_2}{p^j}\right] + \cdots \left[\frac{a_s}{p^j}\right].$$

由 $n = a_1 + a_2 + \cdots a_s$, 知上述不等式成立

推论 1: m 个相邻的整数的乘积可被 m! 整除

证明: 设 $a_1 = m$, 整数 $a_2 > 0$, 且 $n = a_1 + a_2$. 由定理 2 可知, $\frac{n!}{a_1! \cdot a_2!} = \frac{n!}{a_1! \cdot (n - a_1)!}$

$= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n - a_1 + 1)}{a_1!}$ 是整数, 即

$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n - m + 1)}{m!}$ 是整数. 这就是说, m 个相邻的正整数的乘积可被 m! 整除. 若 m 个相邻的整数都是负整数, 设它们分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,

则 $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|$ 是 m 个相邻的正整数

由以上证明可得,

$\frac{|a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_m|}{m!} = \frac{|a_1 \cdot a_2 \cdots a_m|}{m!}$ 是整数, 所以 $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_m}{m!}$ 也是整数

若 m 个相邻的整数既有正整数, 又有负整数, 则其中必有 0, 所以这样的 m 个相邻整数的乘积可被 m! 整除

(下转第 76 页)

收稿日期: 2003- 10- 13

作者简介: 张　芳(1968- ), 女, 山西阳高人, 助教, 主要从事初等数学的教学与研究。



© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

上环 $Z$ 只有恒等自同构, 有理数域 $Q$ 和实数域 $R$ 的自同构也只有一个, 但复数域的自同构有无限多个.

环(域) 的同构也是一个等价关系. 在环(域) 中, 彼此同构的环(域) 看成同一个环(域). 环(域) 论最基本的问题是环(域) 的分类.

3.2 同构在环、域上的应用

3.2.1 环的特征

特征的定义: 一个无零因子环 $R$ 的非零元的相同的阶(对加法来说) 叫做环 $R$ 的特征.

(1) 如果无零因子环 $R$ 的特征是有限整数 $n$, 那么 $n$ 是一个素数. ($R$ 中有同构于 $Z_n$ 的素子环).

(2) 整环. 除环, 以及域的特征或是零, 或者是一个素数 $P$, 如果域 $R$ 的特征为零, 则 $R$ 必包含有理数域 $Q$; 如果域 $P$ 的特征 $R$ 为素数, 则 $R$ 必含 $P$ 元有限域 $Z_p$.

3.2.2 商域

商域的定义: 一个域 $Q$ 叫做环 $R$ 的一个商域, 假如 $Q$ 包含 $R$, 并且 $Q$ 刚好由所有元 $\frac{a}{b}(a, b \in R, b \neq 0)$ 所作成的.

(1) 每一个没有零因子的交换环都是一个域 $Q$ 的子环.

(2) 假如 $R$ 是一个有两个以上的元的环, $F$ 是一个包含 $R$ 的域, 那么 $F$ 包含 $R$ 的一个商域.

(3) 同构的环的商域也同构, 这样抽象地来看, 一个环最多只有一个商域.

3.2.3 环的直积:

环的直积的定义: 设 $R_1$ 和 $R_2$ 是两个环, 在 $R_1 \times R_2$ 上定义如下加法和乘法:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$.

$R_1 \times R_2$ 对于上述的加法和乘法做成的环叫做 $R_1$ 和 $R_2$ 的直积. 类似地可以定义任意多个环的直积.

中国剩余定理: 设 $R$ 是含环, $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 $R$ 的理想, 并且当 $i \neq j$ 时, $Z_i + Z_j = R$, 则有环同构 $R/(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n) \cong \prod_{i=1}^{n}(R/I_i)$.

4 小结

本文简单地探讨了同构在向量空间、群、环、域上的应用. 可以看出它们既有相同点, 又有不同点, 在学习的过程中要加以联系和区别.

参考文献:

[1]张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.

[2]张禾瑞, 郝炳新. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

## The Application of Isomorphisme in Algebra

*Cui Ya-qiong*

(Department of Mathematics and Physics, Datong Vocational College, Datong, Shanxi, China, 037008)

**Abstract**: This article emphasizes the importance of isomorphisme in algebra by introducing applications of isomorphisme in the vectoriel, group, anneau and field.

**Key words**: isomorphisme; vectoriel; group; anneau; field.

〔责任编辑 赵立人〕

(上接第 74 页)

综上可知, m 个相邻的整数的乘积可被 m! 整除.

推论 2: m 个相邻的整数的乘积可被 m 整除.

以上推论 2 可由推论 1 直接得到.

参考文献

1. 余元希, 毛宏德. 初等代数研究[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.

2. 潘承洞, 潘承彪. 简明数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1998.

## Two Conclusions on the Standard Disassembled Formula Theorem of n!

*Zhang Fang*

(Department of Mathematics and Physics, Datong Vocational College, Datong, Shanxi, China, 037008)

**Abstract**: The standard disassembled formula theorem of n! is a very important theorem in elementary mathematics. By analyzing and reasoning, this theorem the author draws two important conclusions.

**Key words**: factorial; prime submultiple; exponential; the standard disassembled formula; divide exactly

〔责任编辑 赵立人〕



© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net